



## GUÍA DE ESTUDIO N°5 4° MEDIO - MATEMÁTICA

NOMBRE: \_\_\_\_\_ FECHA: \_\_\_\_\_

### INSTRUCCIONES

- La guía debe ser resuelta en el cuaderno.
- Los ejercicios deben estar copiados y resueltos con el desarrollo correspondiente
- Si tienes dudas puedes consultar directamente a mi correo [profeasusarte@gmail.com](mailto:profeasusarte@gmail.com) las dudas deben ser enviadas de lunes a viernes, entre las 09:00 y las 17:00 horas.
- Puedes descargar algunas ayudas en la página <https://ayudas-en-matematica.webnode.es/> ahí también encontrarás las guías, las iré subiendo semanalmente.
- Fecha Entrega: **18 de mayo de 2020**

### OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

- Resolver ejercicios que involucre operatoria básica en los conjuntos Enteros y Racionales.
- Resolver problemas que involucre operatoria básica en Enteros y Racionales.

## Función Inyectiva – Sobreyectiva - Biyectiva

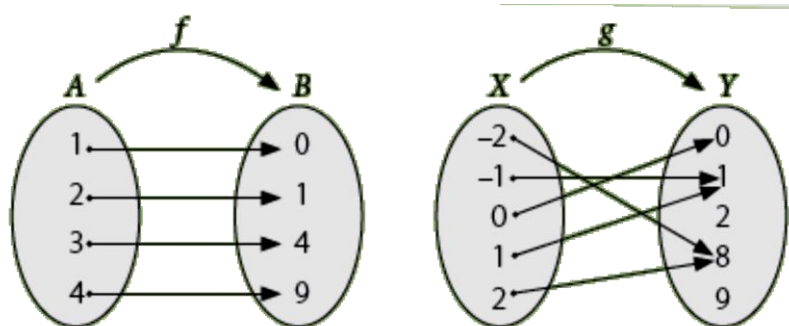
Las funciones pueden tener diversas propiedades, las cuales facilitan su análisis y solución en muchos problemas de aplicación

### FUNCIÓN INYECTIVA.

Una función  $f: A \rightarrow B$  es Inyectiva o uno a uno, si para todo par de elementos diferentes del dominio, sus imágenes son diferentes. Es decir, ningún elemento del conjunto B es imagen de dos elementos distintos del conjunto A, o en forma equivalente:

$$\forall x_1, x_2 \in A, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \text{ o } x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

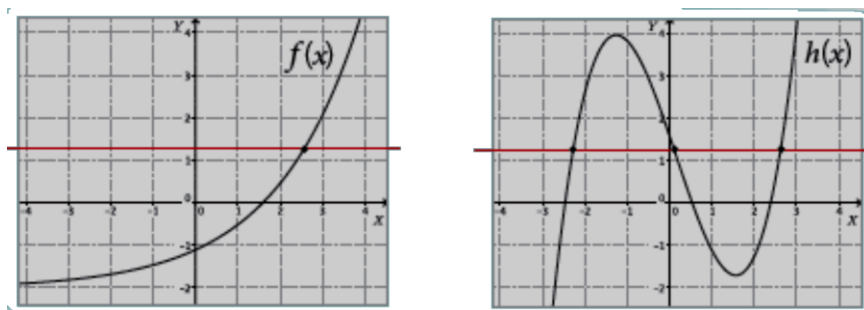
Por ejemplo, sean las funciones  $f: A \rightarrow B$  y  $g: X \rightarrow Y$ , dos funciones cuya representación mediante diagramas sagitales es la siguiente:



Tenemos que la función  $f: A \rightarrow B$  es inyectiva porque las imágenes de cada uno de los elementos del dominio son diferentes, en cambio la función  $g: X \rightarrow Y$  no es inyectiva porque  $g(-1) = 1$  y  $g(1) = 1$ , es decir  $-1$  y  $1$  tienen la misma imagen.

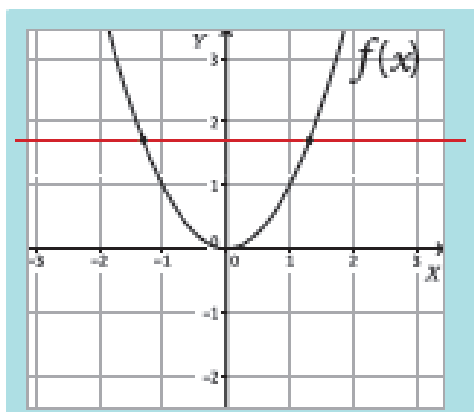
Para determinar si la función es inyectiva, resulta útil construir su representación gráfica y luego realizar el test de la recta horizontal, que consiste en trazar rectas horizontales que intersecten a la gráfica. Si la recta corta a la gráfica en un solo punto, la función es inyectiva. En cambio, si la recta intersecta a la gráfica en más de un punto, la función no es inyectiva.

Por ejemplo, observa las gráficas de las funciones  $f$  y  $h$ .



La función  $f$  es inyectiva, ya que toda línea horizontal corta la gráfica en un único punto. En tanto, que la función  $h$  no es inyectiva, puesto que la recta horizontal dibujada corta a la gráfica de  $h$  en tres puntos.

**Otro Ejemplo:** Sean las funciones  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  con  $f(x) = x^2$ . Determinemos si  $f(x)$  es inyectiva. Al graficar la función  $f$  queda:

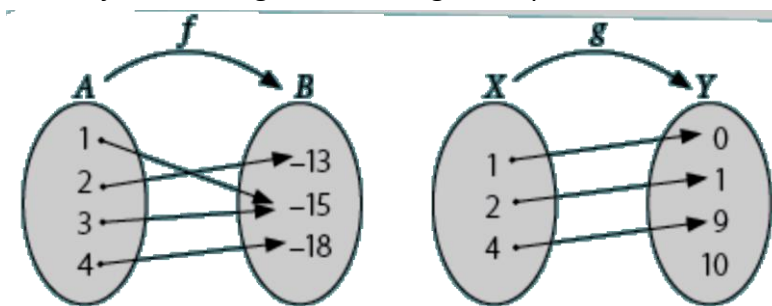


Al tirar la recta horizontal, interseca a la curva en dos puntos, por lo tanto, la función no es inyectiva. Otra manera de resolver el problema, es en forma algebraica, ya que sabemos que en una función inyectiva se cumple que si  $f(x_1) = f(x_2)$  entonces  $x_1 = x_2$ . Aplicando lo anterior a  $f$ :

$$\begin{aligned}
 f(x_1) &= f(x_2) \\
 x_1^2 &= x_2^2 \\
 x_1^2 - x_2^2 &= 0 \\
 (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) &= 0 \\
 \text{De donde:} \\
 (x_1 + x_2) = 0 &\quad \text{o} \quad (x_1 - x_2) = 0 \\
 x_1 = -x_2 &\quad \text{o} \quad x_1 = x_2
 \end{aligned}$$

## FUNCIÓN SOBREYECTIVA

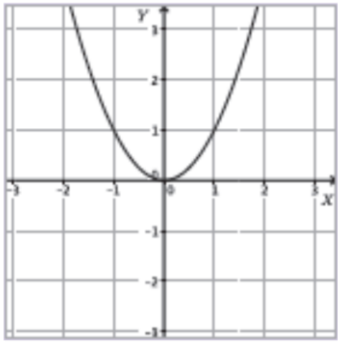
Una función es sobreyectiva (o epiyectiva) cuando  $Rec f = B$ . Es decir, cuando todos los elementos del conjunto de llegada son imagen de por lo menos un elemento del dominio. Por ejemplo, en las



cuyas representaciones sagitales están dibujadas, tenemos que  $f: A \rightarrow B$  es una función sobreyectiva ya que  $Rec f = B$ . Por otro lado, la función  $g: X \rightarrow Y$  no es sobreyectiva ya que hay elementos del conjunto de llegada que no son imágenes de ningún número, en este caso el 10.

Como  $g$  no es sobreyectiva, podemos redefinir el conominio para que sí lo sea; por ejemplo, si definimos el conjunto  $Z = Y - \{10\}$ , tenemos que la función  $g: X \rightarrow Z$  es sobreyectiva ya que todo elemento de  $Z$  es imagen de algún elemento del dominio.

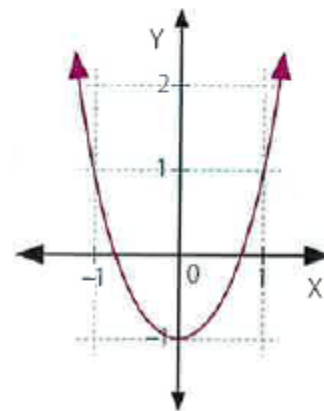
**Ejemplos:**



1. La función  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ , definida por  $g(x) = x^2$ , es **sobreyectiva**, ya que para todo  $y \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$  existe un valor  $x$ , tal que  $f(x) = y$ .

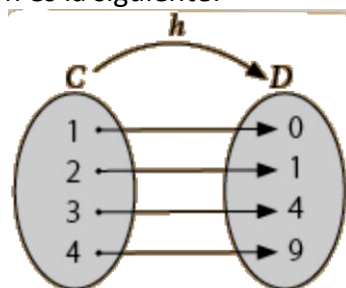
2. La función  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $h(x) = x^2$ , **NO es sobreyectiva**, ya que  $Rec(h) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ .

3. La gráfica que se muestra representa la función  $q: \mathbb{R} \rightarrow [-1, +\infty[$ , definida por  $q(x) = 2x^2 - 1$ . De la gráfica se observa que  $Rec(q) = [-1, +\infty[$ . Luego, la función  $q$  cumple con ser una **función sobreyectiva**.



**FUNCIÓN BIYECTIVA:**

Una función es biyectiva cuando es inyectiva y sobreyectiva a la vez, es decir, cuando todos y cada uno de los elementos de codominio son imagen de solo un elemento del dominio; por ejemplo, sea la función  $h: C \rightarrow D$  cuya representación es la siguiente:



Se tiene que la función  $h$  es biyectiva porque cada elemento del codominio  $D$  es imagen de solo un elemento del dominio  $C$ , es decir,  $h$  es inyectiva y sobreyectiva.

**Ejemplos:**

1. La función  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $g(x) = 3x + 5$ , es biyectiva, ya que:

✓ Inyectiva

Si  $g(x_1) = 3x_1 + 5$  y  $g(x_2) = 3x_2 + 5$ , se tiene:

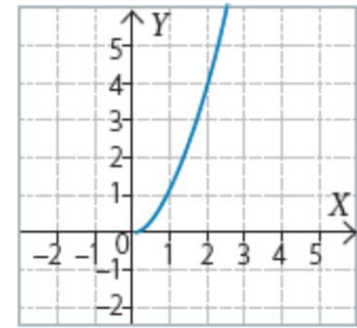
$$\begin{aligned} g(x_1) &= g(x_2) \\ 3x_1 + 5 &= 3x_2 + 5 \\ 3x_1 + 5 - 3x_2 - 5 &= 0 \\ 3x_1 - 3x_2 &= 0 \\ 3(x_1 - x_2) &= 0 \\ x_1 - x_2 &= 0 \\ x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

✓ Sobreyectiva

$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} / g(x) = y$  o  $Rec(g) = \mathbb{R}$   
El recorrido de la función afín  $g(x)$  corresponde a todos los números reales ( $\mathbb{R}$ ); es decir, se cumple que  $Rec(g) = \mathbb{R}$ .  
Por lo tanto es sobreyectiva

2. Redefine el dominio y el codominio de la función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida como  $f(x) = x^2$ , de modo que  $f$  sea una función biyectiva.

Como ya hemos analizado, la función  $f(x) = x^2$  no es ni inyectiva ni sobreyectiva. Para que lograr que la función cuadrática sea inyectiva podemos considerar únicamente una de sus ramas. Por ejemplo, la rama de la derecha, tal como se muestra en la figura. En este caso, el dominio de la función son todos los números reales positivos y el cero, es decir,  $\text{dom}f = \mathbb{R}^+_0$

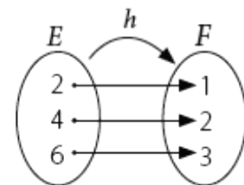
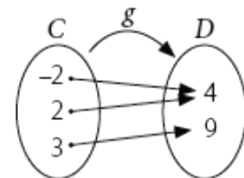
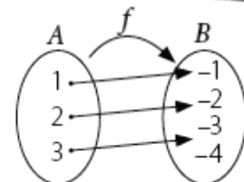


A partir del dominio definido anteriormente podemos determinar el recorrido de la función. Luego,  $\text{Rec}f = \mathbb{R}^+_0$

Finalmente, para que la función sea sobreyectiva, su recorrido debe ser igual que el codominio. Por lo tanto, el codominio debe ser el conjunto de todos los números reales positivos y el cero. En resumen, la función  $f: \mathbb{R}^+_0 \rightarrow \mathbb{R}^+_0$ , definida como  $f(x) = x^2$  es biyectiva.

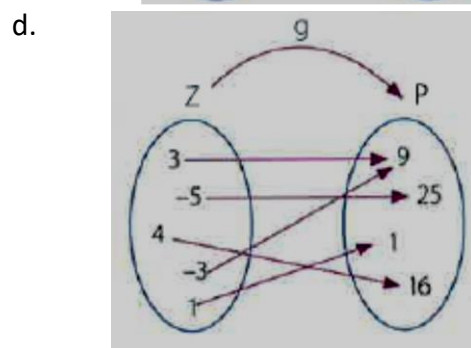
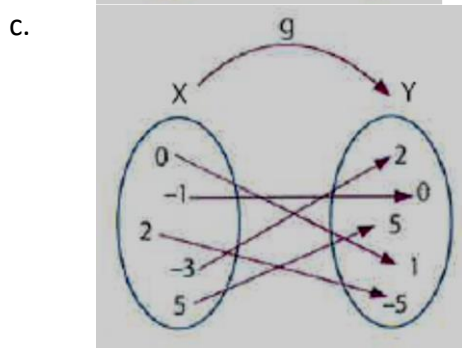
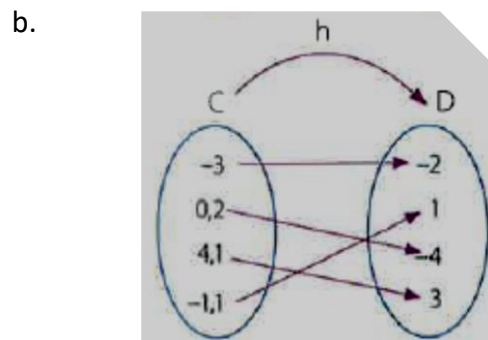
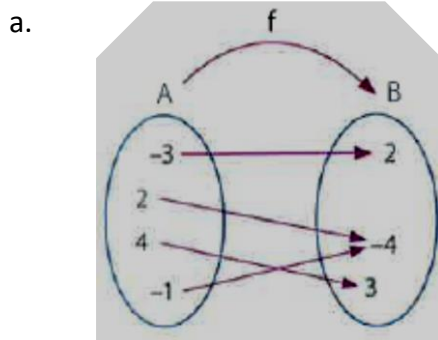
## EN RESUMEN

- Una función es **inyectiva** si a cada elemento del recorrido le corresponde una única preimagen. Por ejemplo, la función  $f: A \rightarrow B$  representada en el diagrama sagital es inyectiva ya que todos los elementos del dominio tienen imágenes diferentes.
- Una función es **sobreyectiva** si su recorrido es igual al codominio, es decir, cada elemento del codominio tiene al menos una preimagen. Por ejemplo, la función  $g: C \rightarrow D$  representada en el diagrama sagital es sobreyectiva ya que todo elemento del codominio  $D$  tiene al menos una preimagen.
- Una función es **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva a la vez, es decir, cada elemento del codominio tiene una única preimagen. Por ejemplo, en la función  $h: E \rightarrow F$  representada en el diagrama sagital, a cada elemento de codominio  $F$  le corresponde una única preimagen.

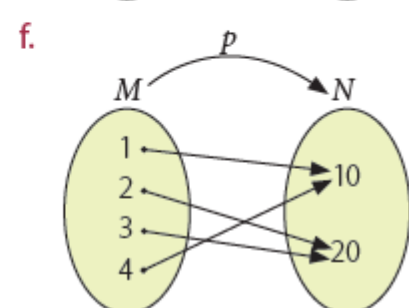
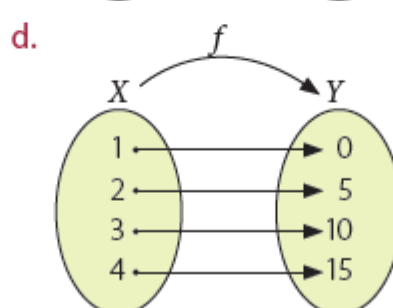
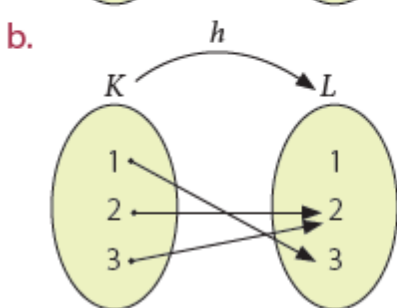
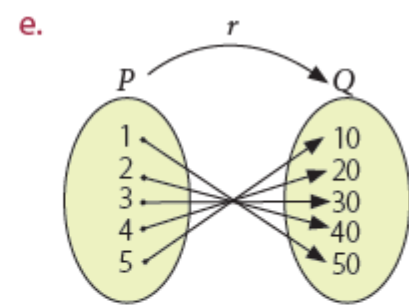
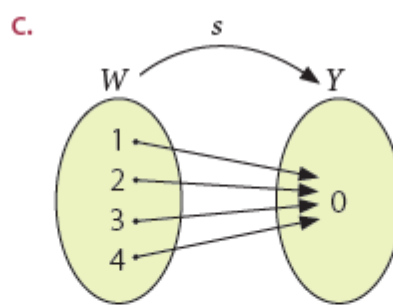
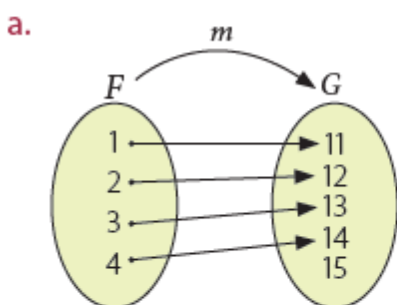


A resolver...

1. Determina que función representada en un diagrama sagital es inyectiva.



2. Determina si la función dada es inyectiva y/o sobreyectiva. Justifica tu respuesta



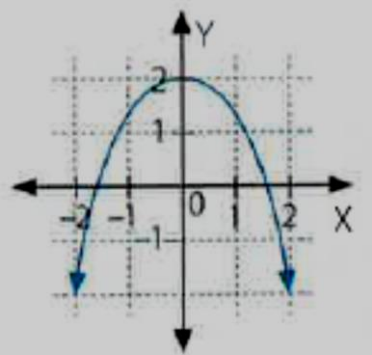
3. De las funciones anteriores, ¿cuál o cuáles son biyectivas?. Justifica tu respuesta.

4. Dados los conjuntos

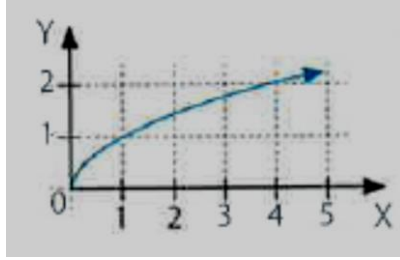
$A = \{1, 2, 3\}$  y  $B = \{10, 100, 1.000, 10.000\}$  y la función  $f: A \rightarrow B$  definida por  $f(x) = 10^x$  para cada  $x \in A$ .

- Representa con un diagrama sagital a la función  $f$ .
- Establece el conjunto de pares ordenados de  $f$ .
- Determina si  $f$  es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva

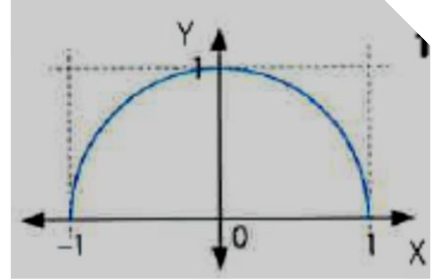
5. Determina si las siguientes funciones son inyectivas o no. Justifica tu respuesta.



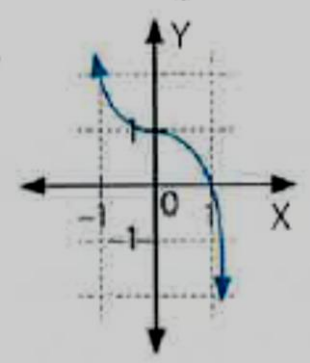
a.



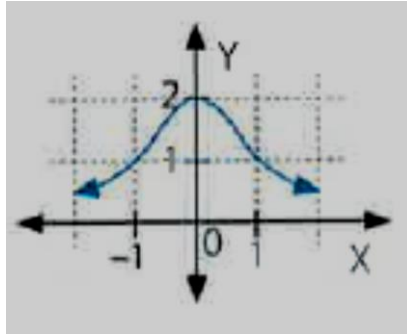
b.



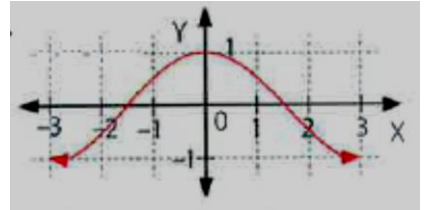
c.



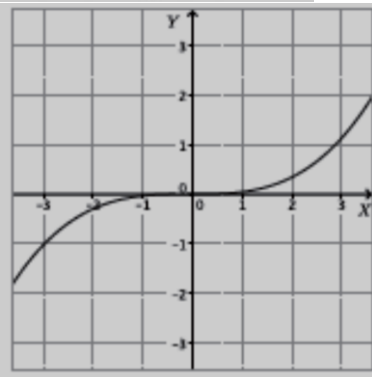
d.



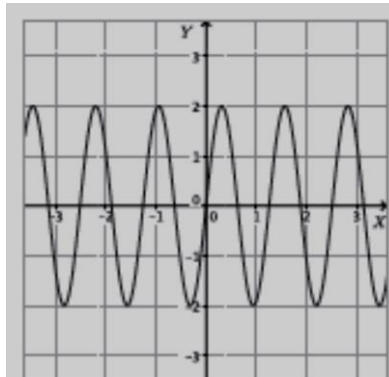
e.



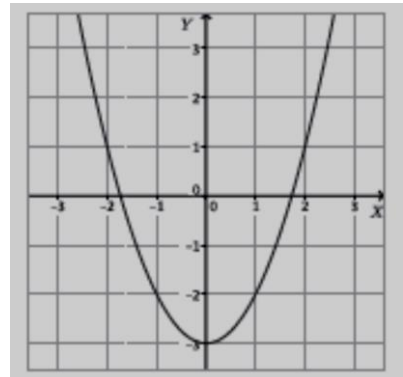
f.



g.



h.



i.

6. Determina cuáles de las siguientes funciones, definidas en los números reales, son inyectivas. Justifica tu respuesta.

a.  $f(x) = (x + 1)^2 - x^2$

b.  $f(x) = 3x^3$

c.  $f(x) = (x + 2)^2$

d.  $f(x) = 0,3x^4$

e.  $f(x) = \sqrt{x + 1}$

f.  $f(x) = -2x^2 + 3$

7. Determina cuáles de las siguientes funciones, definidas en los números reales, son sobreyectivas. Justifica tu respuesta.

a.  $f(x) = 5(x - 6)$

b.  $f(x) = 3(x - 2)^3 + 5$

c.  $f(x) = 6^x$

d.  $f(x) = \log x$

8. Determina si cada función es sobreyectiva. Para las que no lo sean, explica por qué no lo son.

a.  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = x^4$

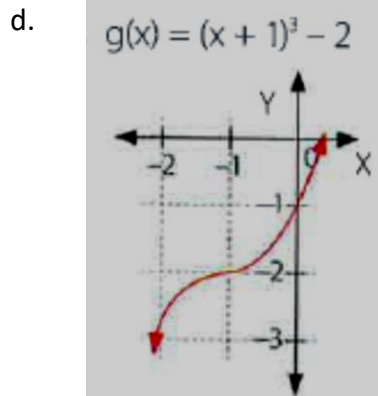
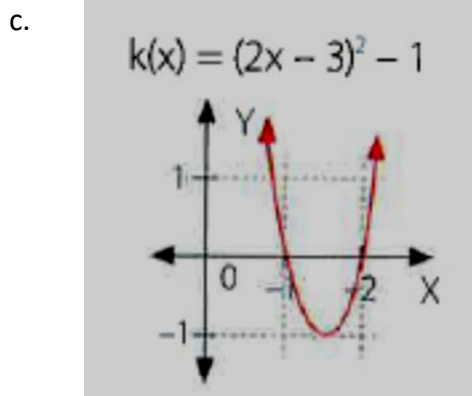
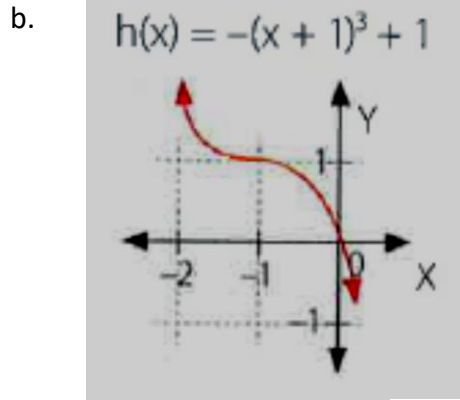
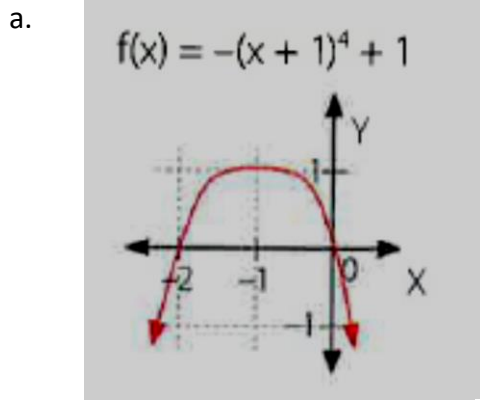
b.  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = x^3$

c.  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = 2(x - 1)^2$

d.  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = \sqrt{x - 5}$

e.  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = 3x - 5$

9. Determina el recorrido en el que la función es sobreyectiva



10. Determina si cada función es biyectiva. De no serlo, establece las condiciones para que lo sea.

- |   |   |
|---|---|
| a. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por $f(x) = x^3$     | b. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por $f(x) = x^3 + 1$   |
| c. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por $f(x) = x^3 - 1$ | d. $]-\infty, 0] \rightarrow ]-\infty, 5]$ , definida por $h(x) = -x^2 + 5$ |
| e. $]0, +\infty[ \rightarrow ]0, +\infty[$ , definida por $p(x) = \log x$ | f. $]0, +\infty[ \rightarrow ]0, +\infty[$ , definida por $p(x) = 10^x$     |

11. Observa cada función con su gráfico y luego explica si es o no biyectiva.

